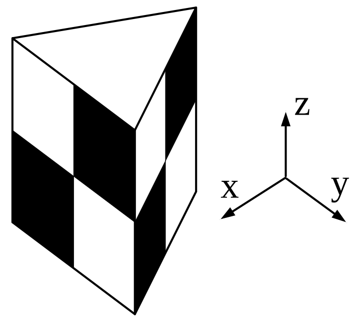
Übungen zur Einführung in die Gruppentheorie

9. Übung am 12. Dezember 2001

U16) Basisfunktionen der Gruppe D_3

Wir betrachten die Gruppe D_3 (vgl. Abbildung), welche isomorph ist zu unserem alten Bekannten C_{3v}.



Die Charaktertafel lautet

	E	$\{C_3, C_3^2\}$	$\{C_2^{(1)}, C_2^{(2)}, C_2^{(3)}\}$
Γ_1	1	1	1
Γ_2	1	1	-1
Γ_3	2	-1	0

wobei C_3 eine Drehung um 120° um die z-Achse (dreizählige Achse) bezeichnet, und $C_2^{(i)}$ bezeichnet die drei zweizähligen Achsen.

a) Diskutieren Sie das Transformationsverhalten der Funktionen

$$\mathbf{r} \to x,\ y,\ z,\ x^2,\ y^2,\ z^2,\ xy$$

[wobei $\mathbf{r} = (x, y, z)$] unter den Symmetrietransformationen von D_3.

Hinweis: **Koordinatentransformationen**

Für jede lineare Koordinatentransformation (Drehungen, Spiegelungen, etc.) gibt es eine orthogonale 3×3-Matrix R sowie einen Operator $\hat{P}_R$, sodaß für beliebige Funktionen f gilt

$$[\hat{P}_R f]\,(R\,\mathbf{r}) = f\,(\mathbf{r})\,.$$

bzw.

$$[\hat{P}_R f]\,(\mathbf{r}) = f\left(R^{-1}\,\mathbf{r}\right)$$

Demnach läßt sich die Wirkung des Operators $\hat{P}_R$ zurückführen auf die zugehörige inverse Transformation R^{-1} der Koordinaten.

b) Bilden Sie Linearkombinationen dieser Funktionen, die sich jeweils nach irreduziblen Darstellungen von D_3 transformieren.