

Übungen zur Einführung in die Gruppentheorie

7. Übung am 28. November 2001

U14) Clebsch-Gordan-Koeffizienten der Gruppe C_{3v}

Definition: Eine Gruppe G heißt *einfach reduzibel*, wenn die Produktdarstellungen $\Gamma_I \times \Gamma_J$ die irreduziblen Darstellungen Γ_K von G jeweils nur mit den Vielfachheiten $a_K = 0$ oder $a_K = 1$ enthalten.

Gemäß der Multiplikationstafel für die irreduziblen Darstellungen der Gruppe C_{3v} bildet C_{3v} offenbar eine einfach reduzible Gruppe. Bei einfach reduziblen Gruppen lassen sich die Clebsch-Gordan-Koeffizienten aus den Darstellungsmatrizen ableiten.

- Verwenden Sie die Vollständigkeitsrelation für die Darstellungsmatrizen der Gruppe G , um eine Beziehung herzuleiten zwischen einerseits den Darstellungsmatrizen von G und andererseits (Produkten von) Clebsch-Gordan-Koeffizienten von G .
- Skizzieren Sie, wie sich aus dieser Beziehung die Clebsch-Gordan-Koeffizienten einer einfach reduziblen Gruppe herleiten lassen.

Hinweis: Grundsätzlich lassen sich die Clebsch-Gordan-Koeffizienten $\left(\begin{array}{cc|c} I & J & Kl \\ \mu & \nu & \kappa \end{array} \right)$ nur bis auf eine für feste I, J und K frei wählbaren Phase bestimmen.

- Wie vereinfacht sich dieses Schema, wenn Sie die Clebsch-Gordan-Koeffizienten für die Produktdarstellung $\Gamma_I \times \Gamma_1$ berechnen wollen?
- Berechnen Sie die Clebsch-Gordan-Koeffizienten für die Produktdarstellungen $\Gamma_1 \times \Gamma_1$, $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, $\Gamma_1 \times \Gamma_3$ und $\Gamma_2 \times \Gamma_3$ von C_{3v} .