Übungen zur Einführung in die Gruppentheorie

3. Übung am 31. Oktober 2001

U6) Matrizenmultiplikation

Wir betrachten die Gruppe $GL(n)$ der invertierbaren $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$f: \quad A \to \det A \qquad A \in GL(n)$$

eine (nichttriviale) eindimensionale Darstellung der Gruppe $GL(n)$ definiert.

U7) Die zweidimensionale Drehgruppe $SO(2)$

a) Machen Sie sich klar: Die Drehungen um eine feste Achse bilden eine abelsche Gruppe.

b) Diese Drehgruppe ist isomorph zur Gruppe $SO(2)$ der orthogonalen 2×2-Matrizen mit

$$D_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, daß

- $D_2(\alpha)\, D_2(\beta) = D_2(\beta)\, D_2(\alpha) = D_2(\alpha + \beta)$
- $D_2^{-1}(\alpha) = D_2(-\alpha)$

Hinweis: $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

c) Wegen Teilaufgabe a) sind alle irreduziblen Darstellungen von $SO(2)$ eindimensional. Bestimmen Sie die zwei eindimensionalen irreduziblen Darstellungen von $SO(2)$

- die eindimensionalen Drehmatrizen
- die neuen Basisvektoren ausgedrückt durch die kartesischen Basisvektoren $\hat{\mathbf{e}}_x = (1,0)$ und $\hat{\mathbf{e}}_y = (0,1)$.

d) Die neuen Basisvektoren bilden eine „natürliche“ (weil symmetrieangepaßte) Basis für axialsymmetrische Probleme, d.h. Probleme mit $SO(2)$-Symmetrie. Beschreiben Sie das Transformationsverhalten der neuen Basisvektoren unter Rotationen und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Transformationsverhalten der kartesischen Basisvektoren $\hat{\mathbf{e}}_x$ und $\hat{\mathbf{e}}_y$.

U8) Gleichseitiges Dreieck

Geben Sie eine nicht-triviale zweidimensionale Darstellung für die Symmetriegruppe C_{3v} eines gleichseitigen Dreiecks an.

Bemerkung: Wir werden später sehen, daß die Gruppe C_{3v} genau eine zweidimensionale irreduzible Darstellung besitzt.