Übungen zur Einführung in die Gruppentheorie

12. Übung am 16. Januar 2002

U21) Eigenschaften Zeitumkehr-invarianter Systeme

Im folgenden bezeichnet Θ den Zeitumkehr-Operator.

a) Es sei $|\tilde{\alpha}\rangle = \Theta\,|\alpha\rangle$ und $|\tilde{\beta}\rangle = \Theta\,|\beta\rangle$. Außerdem sei $\hat{\mathcal{O}}$ ein beliebiger, linearer Operator. Zeigen Sie

$$\langle\alpha|\hat{\mathcal{O}}|\beta\rangle = \langle\tilde{\beta}|\,\Theta\,\hat{\mathcal{O}}^\dagger\,\Theta^{-1}\,|\tilde{\alpha}\rangle$$

b) Wir nehmen an, daß der Hamilton-Operator H eines spinlosen Systems invariant unter Zeitumkehr sei, und $|n\rangle$ sei ein nichtentarteter Energie-Eigenzustand. Zeigen Sie, daß die zugehörige Wellenfunktion reell gewählt werden kann.

Die Wellenfunktionen freier Teilchen sind die komplexen Funktionen e^{ikx}. Warum verletzt dies nicht die Zeitumkehr-Invarianz?

c) Wir wollen annehmen, daß ein spinloses Teilchen in einem Potential $V(\mathbf{r})$ gebunden sei, wobei $V(\mathbf{r})$ derart asymmetrisch sei, daß die Energieniveaus nicht entartet sind. Zeigen Sie, daß

$$\langle\mathbf{L}\rangle = 0$$

für jeden Eigenzustand des Teilchens, wobei $\mathbf{L}$ den Operator für den Bahndrehimpuls bezeichnet.

Wenn wir für die Wellenfunktion eines solchen nichtentarteten Energieniveaus den Ansatz

$$\sum_l \sum_m F_{lm}(r)\,Y_l^m(\theta,\phi)$$

machen mit Kugelfunktionen $Y_l^m(\theta,\phi)$, welche Phasenbedingung folgt für die Funktionen $F_{lm}(r)$?