

Übungen zur Einführung in die Gruppentheorie

1. Übung am 17. Oktober 2001

U1) Einige Konsequenzen der Gruppenaxiome

Sei a ein beliebiges Gruppenelement und e das Einselement. Zeigen Sie:

- $a^{-1} a \stackrel{!}{=} a a^{-1} = e$
- $a e \stackrel{!}{=} e a = a$
- Es gibt genau ein Einselement mit $e^{-1} = e$.
- Jedes Element hat genau ein inverses.

U2) Dreielementige Gruppe

Zeigen Sie durch explizites Aufstellen der Multiplikationstafel, daß es nur eine dreielementige Gruppe gibt.

U3) Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks

- Bestimmen Sie die Symmetrieelemente (Drehungen und Spiegelungen) eines gleichseitigen Dreiecks.
- Stellen Sie für die zugehörige Symmetriegruppe die Multiplikationstafel auf.

In der Notation von Koster *et al.* heißt diese Symmetriegruppe C_{3v} .

U4) Erzeugende einer Gruppe

Alternativ zur Multiplikationstafel läßt sich eine Gruppe durch ihre *Erzeugenden* (bzw. *Generatoren*) charakterisieren. Hier handelt es sich um Elemente der Gruppe, welche bestimmten *Erzeugenden-Relationen* genügen. Ausgehend von diesen Relationen lassen sich alle Elemente einer Gruppe durch Produkte dieser Erzeugenden darstellen.

Als Beispiel betrachten wir eine (nichtkommutative!) Gruppe mit den zwei Generatoren p und q und den Erzeugenden-Relationen

$$p^3 = e \quad q^2 = e \quad (qp)^2 = e.$$

Zeigen Sie: Die Gruppe enthält die 6 Elemente

$$\{e, p, p^2, q, qp, qp^2\}.$$

Stellen Sie die Multiplikationstabelle auf. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Tabelle aus U3.

Literatur zur Gruppentheorie

Allgemeine Literatur:

- a) W.-K. Tung, *Group Theory in Physics*, World Scientific (1985).
ausführliche Einführung, Schwerpunkt: kontinuierliche Gruppen
- b) W. Ludwig und C. Falter, *Symmetries in Physics*, (Springer, Berlin, 1988).
ausführliche Einführung, diskrete und kontinuierliche Gruppen
- c) L. M. Falicov, *Group Theory and Its Physical Applications*, (University of Chicago Press, Chicago, 1966).
Ein kleines Taschenbuch: übersichtlich und heute so aktuell wie ehemals
- d) A. P. Cracknell, *Angewandte Gruppentheorie*, (Akademie-Verlag, Berlin, 1971).
Enthält im Anhang eine deutsche Übersetzung wichtiger Originalarbeiten.
- e) E. P. Wigner, *Group Theory*, Academic Press (New York, 1959).
Noch heute sehr lesenswerter Klassiker.
- f) Landau, Band III, Kap. ???
Knappe, aber übersichtliche Einführung in die wichtigsten Aspekte der Gruppentheorie, keine Beweise.

Spezielle Literatur zur Gruppentheorie in der Festkörperphysik:

- a) G. F. Koster, J. O. Dimmock, R. G. Wheeler und H. Statz, *Properties of the Thirty-Two Point Groups*, (MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1963)
Tabellen mit den Eigenschaften der 32 kristallographischen Punktgruppen, ein kleines, sehr ergiebiges Nachschlagewerk (Charaktertafeln, Clebsch-Gordan-Koeffizienten, Kompatibilitätsrelationen, etc.)
- b) G. L. Bir und G. E. Pikus, *Symmetry and Strain-Induced Effects in Semiconductors*, (Wiley, New York, 1974)
Sehr anspruchsvoll, großartig, aber unlesbar! Umfassende Diskussion der Gruppentheorie in der Festkörperphysik (insbesondere elektronische Struktur), mit vielen Tabellen. Hier findet der Fachmann alles, was das Herz begehrt und noch viel mehr (wenn er's denn findet ...)